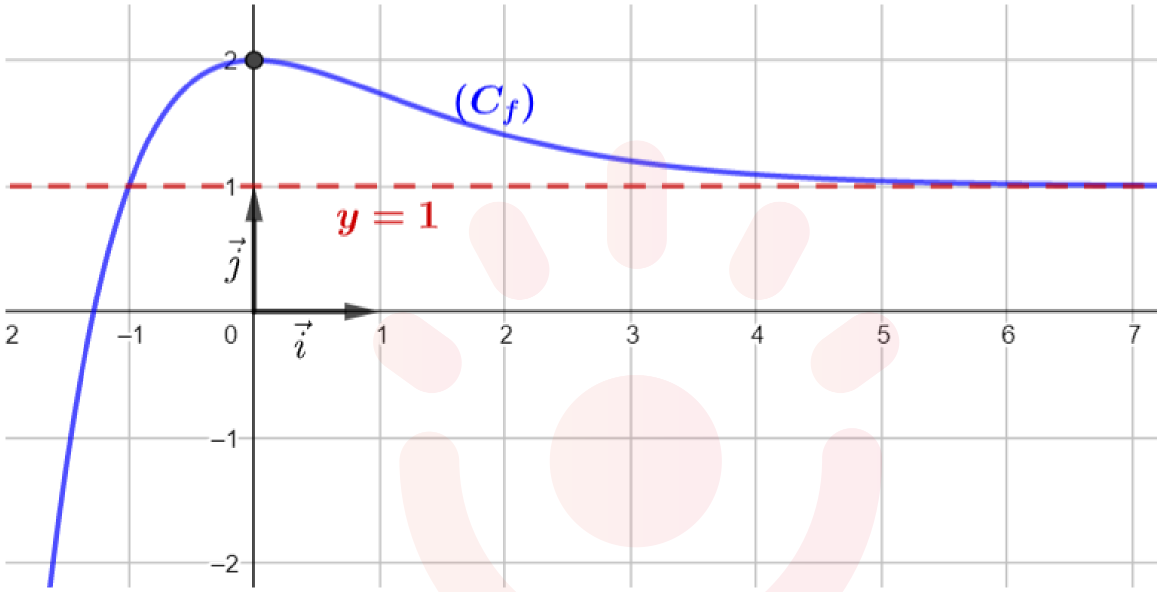
التمرين الأول: (03 نقاط)

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax+b)e^{-x} + c$ حيث a، b و c أعداد حقيقية

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)



- بقراءة بيانية، عيّن a، b و c

II) نضع: $a = b = c = 1$

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل -1

❷ بيّن أن $A = (e-1)cm^2$ حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = 0$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات حمراء وأربع كريات بيضاء و كريتين خضراوين

نسحب عشوائيا كريتان على التوالي بدون إرجاع

نعتبر الحوادث التالية: A: "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون"

B: "سحب كرية بيضاء في المرة الأولى"

❶ احسب احتمال الحوادث A و B

❷ استنتج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين

❸ علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء، احسب احتمال سحب كرتان من نفس اللون

❹ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ عيّن قيم المتغير العشوائي X، ثم أكتب قانون احتماله

ب/ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم احسب $E(1443X + 2022)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) لتكن الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$

II) لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n \geq 1$

❷ بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

❸ نضع من أجل كل n طبيعي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

أ/ بيّن أن (w_n) هندسية أساسها 2 واحسب w_0

ب/ اكتب بدلالة n عبارة w_n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة v_n

❹ استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم احسب نهاية (u_n)

❺ أ/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x) \geq 0$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - 2 + xe^{2-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$)

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) حيث $(\Delta): y = x - 2$

❸ أ/ بيّن أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❹ بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$

❺ بيّن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها

❻ بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له

❼ ارسم (T)، (Δ) و (C_f)

❽ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

◆ التمرين الأول: (03 نقاط)

I) تعيين a، b و c [1.5ن]

من البيان نجد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left((ax+b)e^{-x} + c\right) = 1 \Longrightarrow \boxed{c = 1}$$

•ولدينا:

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (a(0)+b)e^{-(0)} + c = 2 \Longrightarrow b + c = 2 \Longrightarrow \boxed{b = 1}$$

• ولدينا:

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (a-b-ax)e^{-x}$$

ومنه:

$$f'(0) = 0 \Longrightarrow \left(a - b - a(0)\right)e^{-(0)} = 0 \Longrightarrow a - b = 0 \Longrightarrow a = b \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

II)

❶ تعيين دالة أصلية للدالة f: [01ن]

نسمي: $g(x) = (x+1)e^{-x}$

نضع: $u(x) = t + 1$ و $v'(t) = e^{-t}$

ومنه: $u'(t) = 1$ و $v(t) = -e^{-t}$

إذن:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-1}^{x} (t+1)e^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} -e^{-t}dt \\ &= [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - [e^{-t}]_{-1}^{x} = [-(t+2)e^{-t}]_{-1}^{x} = \boxed{-(x+2)e^{-x} + e} \end{aligned}$$

❷ تبيين أن $A = e - 2$ [0.5ن]

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \left((x+1)e^{-x} + 1\right)dx = \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-x}dx + \int_{-1}^{0} dx \\ &= [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{0} + [x]_{-1}^{0} = [-(x+2)e^{-x} + x]_{-1}^{0} \\ &= \boxed{(e-1)}\, cm^2 \end{aligned}$$

◆ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

❶ حساب احتمال الحوادث A و B: [01ن]

$$p(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2 + A_2^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{20}{72}} = \frac{5}{18}$$

$$p(B) = \frac{A_4^1 A_8^1}{A_9^2} = \boxed{\frac{32}{72}} = \frac{4}{9}$$

❷ استنتاج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين: [0.5ن]

$$p(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{20}{72} = \boxed{\frac{52}{72}} = \frac{13}{18}$$

[0.5ن] ❸ حساب احتمال سحب كرتان من نفس اللون علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء:

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{A_4^2}{A_9^2}}{\frac{32}{72}}=\frac{\frac{12}{72}}{\frac{32}{72}}=\boxed{\frac{3}{8}}$$

❹

[1.5ن] أ/ تعيين قيم المتغير العشوائي X، وكتابة قانون احتماله:

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2\}$ حيث:

$$p(X=0)=\frac{A_5^2}{A_9^2}=\boxed{\frac{20}{72}}=\frac{5}{18}$$

$$p(X=1)=\frac{2A_4^1A_5^1}{A_9^2}=\boxed{\frac{40}{72}}=\frac{5}{9}$$

$$p(X=2)=\frac{A_4^2}{A_9^2}=\boxed{\frac{12}{72}}=\frac{1}{6}$$

ومنه:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{20}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{12}{72}$

[0.5ن] ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=0\frac{20}{72}+1\frac{40}{72}+2\frac{12}{72}=\frac{8}{9}$$

[0.5ن] • حساب $E(1443X+2022)$:

$$E(1443X+2022)=1443E(X)+2022=\boxed{\frac{9914}{3}}$$

◆ التمرين الثالث: (05 نقاط)

I)

[0.5ن] ❶ دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x)=\frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}>0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

x	$1 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

[0.25ن] ❷ تبيين أنه من أجل كل $x\geq 1$ فإنّ: $f(x)\geq 1$:

من جدول تغيرات الدالة f نجد أنّ $f(x)\geq 1$

II)

[0.5ن] ❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n\geq 1$:

نسمي $P(n)$ ... $u_n\geq 1$

• لدينا: $u_0\geq 1$ ومنه: $2\geq 1$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$

• نفرض أن $u_n\geq 1$ ونثبت صحة $u_{n+1}\geq 1$

Nafouz

• لدينا: $u_n \geq 1$

وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ فإنّ:

$$u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

❷ تبيين أنّ (u_n) متناقصة تماما، واستنتاج أنها متقاربة: [0.5ن]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1}$$

لدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $1 - u_n \leq 0$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $2u_n - 1 \geq 1$

إذن:

$$\frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} < 0$$

وعليه (u_n) متناقصة تماما

• وبما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

❸

أ/ تبيين أن (w_n) هندسية أساسها 2 وحساب w_0: [0.5ن]

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

ولدينا: $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $-\ln 2$

ب/ كتابة بدلالة n عبارة w_n : [0.5ن]

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \boxed{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$$

• استنتاج بدلالة n عبارة v_n: [0.5ن]

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow e^{w_n} = v_n \Rightarrow v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)} \Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

❹ استنتاج عبارة u_n بدلالة n: [0.5ن]

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow v_n u_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$$

• حساب نهاية (u_n): [0.5ن]

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}\right) = \boxed{1}$$

لأنّ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=0$ ، $\left(-1<\frac{1}{2}<1\right)$

❺

أ/ كتابة بدلالة n المجموع S_n : [0.5ن]

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = \boxed{\ln(2)\,(1-2^{n+1})}$$

ب/ كتابة بدلالة n الجداء P_n : [0.25ن]

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \ldots \times e^{w_n} = e^{w_0+w_1+\cdots+w_n} = e^{S_n} = e^{\ln(2)(1-2^{n+1})}$$
$$= \boxed{2^{(1-2^{n+1})}}$$

◆ التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I)

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة g، وتشكيل جدول تغيراتها: [01ن]

- النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x}e^2 - xe^{-x}e^2 + 1) = 1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

- المشتقة:

$$g'(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-2$:

$$x-2=0 \Longrightarrow x=2$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ 1

❷ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x) \geq 0$: [0.5ن]

من جدول تغيرات الدالة g نجد أنّ $g(x) \geq 0$ (لأنّ الدالة g تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة)

II)

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: [0.5ن]

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2-(-x)e^{-x}e^2) = \boxed{+\infty}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

❷ أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x+2)]$: [0.5ن]

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to+\infty} [xe^{2-x}] = \lim_{x\to+\infty} [-(-x)e^{-x}e^2] = 0$$

• نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x+2$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ): [0.5ن]

$$f(x)-(x+2) = xe^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة x:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

- $\left(C_f\right)$ تحت (Δ) لما $x \in]-\infty;0[$
- $\left(C_f\right)$ يقطع (Δ) لما $x = 0$
- $\left(C_f\right)$ تحت (Δ) لما $x \in]0;+\infty[$

❸ أ/ تبيين أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$: [0.5ن]

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x} + 1 = g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها: [0.5ن]

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❹ تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31;0.32[$: [0.5ن]

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(0.31) \times f(0.32) < 0$ لأنّ: $f(0.31) \approx -0.01$ و $f(0.32) \approx 0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.31;0.32[$

❺ تبيين $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة إنعطاف : [0.5ن]

لدينا: $f'(x) = g(x)$

ومنه: $f''(x) = g'(x)$

إذن إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

المشتقة الثانية تنعدم عند $x = 2$ وتغير إشارتها

إذن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة إنعطاف $\Omega(2;f(2))$ أي: $\boxed{\Omega(2;2)}$

❻ تبيين أنّ $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) : [0.5ن]

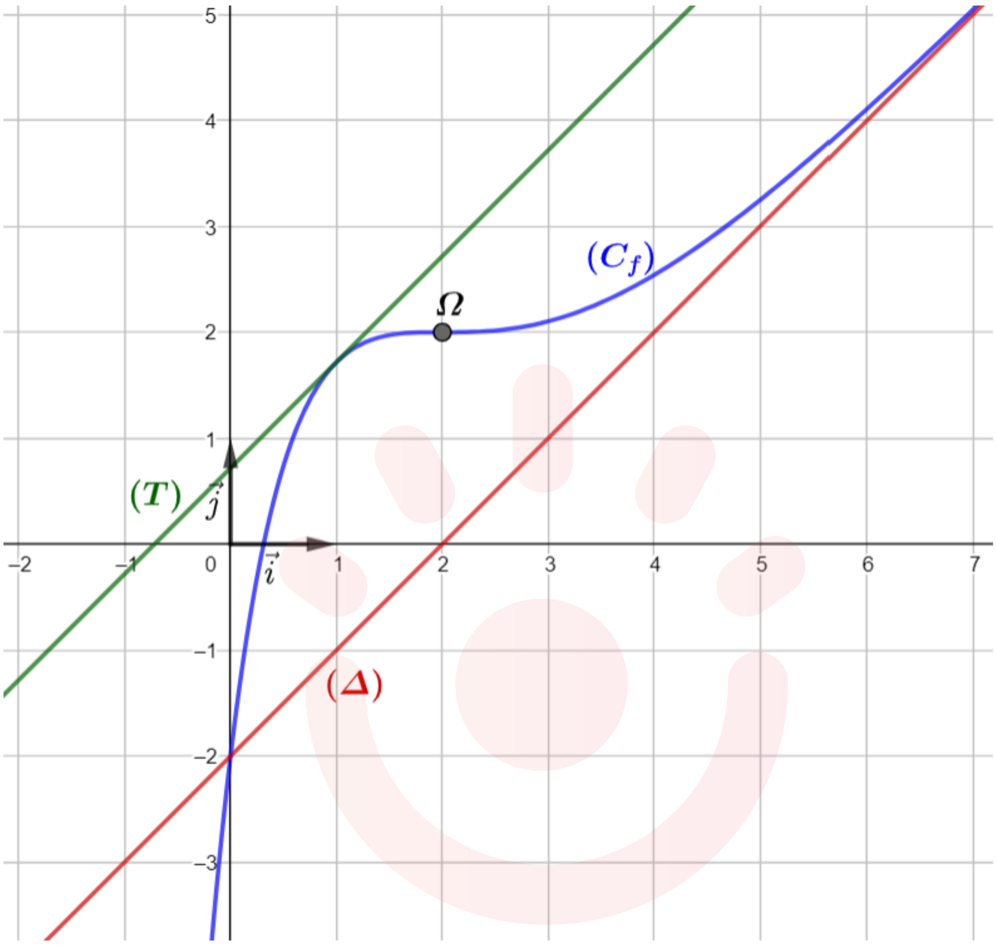
$$f'(a) = 1 \Longrightarrow (1-a)e^{2-a} + 1 = 1 \Longrightarrow (1-a)e^{2-a} = 0 \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

- كتابة معادلة (T): [0.5ن]

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = \boxed{x + e - 2}$$

❼ رسم (T)، (Δ) و $\left(C_f\right)$: [01ن]



[0.5ن]

❽ **المناقشة البيانية:**

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ **هي فواصل نقط تقاطع** (C_f) **مع المستقيمات ذات المعادلات**

$y_m = x + m$

وهي:

لما $m < -2$ **المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما**

لما $m = -2$ **المعادلة تقبل حلا معدوما**

لما $-2 < m < e - 2$ **المعادلة تقبل حلين موجبين**

لما $m = e - 2$ **المعادلة تقبل حلا وحيدا قيمته** $x = 1$

لما $m > e - 2$ **المعادلة لا تقبل حلولا**